UNA EXTENSIÓN DE SISTEMAS DÉBILES DE CHEBYSHEV

F.E. Levis[†], C.V. Ridolfi[‡] y L. Zabala[†]

[†]*Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET, FCEFQyN, RN 36 KM 601, 5800 Río Cuarto, Argentina,*
flevis@exa.unrc.edu.ar, ludmilazabala98@gmail.com
[‡]*Universidad Nacional de San Luis, CONICET, IMASL, Almirante Brown 907, 5700 San Luis, Argentina,*
ridolfi@unsl.edu.ar

Resumen: En este trabajo presentamos una forma de extender sistemas débiles de Chebyshev en intervalos compactos a cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Como una consecuencia, damos un procedimiento de "suavizado", el cual muestra que sistemas débiles de Chebyshev pueden ser aproximados uniformemente por sistemas fuertes de Chebyshev.

Palabras clave: *aproximación simultánea, centro relativo de Chebyshev, sistema de Chebyshev, sistema débil de Chebyshev*
2020 AMS Subject Classification: 15A03 - 41A50

1. INTRODUCCIÓN

De aquí en adelante, dado $n \in \mathbb{N}$, el símbolo M denota cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ que contenga al menos $n+1$ puntos distintos. A continuación, M^* representa la cápsula convexa de M. Denotamos por $\mathcal{C}(M)$ el espacio de todas las funciones reales continuas en M. Si $N \subset M$ y U es un subespacio lineal n-dimensional de $\mathcal{C}(M)$, escribimos $\dim(U) = n$ para indicar la dimensión de U y definimos $U_N := \{\underline{u}_N : u \in U\}$, donde $\underline{u}_N$ denota la restricción de u a N.

Para $\{g_1, \dots, g_\ell\} \subset \mathcal{C}(M)$ y $z_1, \dots, z_\ell$ puntos distintos en M, denotamos por

$$V\begin{pmatrix} g_1, \dots, g_{\ell-1}, g_\ell \\ z_1, \dots, z_{\ell-1}, z_\ell \end{pmatrix} := \det \begin{pmatrix} g_1(z_1) & g_2(z_1) & \dots & g_\ell(z_1) \\ g_1(z_2) & g_2(z_2) & \dots & g_\ell(z_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(z_\ell) & g_2(z_\ell) & \dots & g_\ell(z_\ell) \end{pmatrix}.$$

Un conjunto $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathcal{C}(M)$ es llamado un sistema de Haar (o H-sistema) en M si

$$V\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_{n-1}, u_n \\ z_1, \dots, z_{n-1}, z_n \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{para cualquier elección de } n \text{ elementos distintos } z_1, \dots, z_n \text{ en } M.$$

Un subespacio lineal $U \subset \mathcal{C}(M)$ de $\dim(U) = n$ es llamado un subespacio de Haar (o H-espacio) en M si existe una base $\{u_1, \dots, u_n\}$ para U tal que es un H-sistema en M.

Generalmente, un H-espacio en M^* es llamado un subespacio de Chebyshev (o T-espacio). Para un subespacio lineal $U \subset \mathcal{C}(M^*)$ de $\dim(U) = n$, es bien conocido que U es un T-espacio en M^* si y sólo si existe una base $\{u_1, \dots, u_n\}$ para U tal que

$$V\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_{n-1}, u_n \\ z_1, \dots, z_{n-1}, z_n \end{pmatrix} > 0, \quad \text{para todo } z_1 < \dots < z_n \text{ en } M^*. \tag{1}$$

Sea $U \subset \mathcal{C}(M)$ un H-espacio en M de $\dim(U) = n$. Diremos que U es un subespacio fuerte de Haar (o FH-espacio) en M si existe una base $\{u_1, \dots, u_n\}$ para U tal que (1) es válida en M. En tal caso decimos que $\{u_1, \dots, u_n\}$ es un FH-sistema en M.

Observamos que si $\{u_1, \dots, u_n\}$ es un FH-sistema en M, entonces claramente también es un H-sistema M. Sin embargo, en contraste con el caso $M = M^*$, no todo H–sistema en M es un FH-sistema en M.

Un conjunto $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathcal{C}(M)$ de funciones linealmente independientes es llamado un sistema débil de Chebyshev (DT-sistema) en M si

$$V\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_{n-1}, u_n \\ z_1, \dots, z_{n-1}, z_n \end{pmatrix} \geq 0, \quad \text{para todo } z_1 < \dots < z_n \text{ en } M.$$

Un subespacio lineal $U \subset \mathcal{C}(M)$ de $\dim(U) = n$ es llamado un subespacio débil de Chebyshev (DT-espacio) en M si existe una base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ para U tal que es un DT-sistema en M.

El siguiente teorema provee una caracterización de DT-sistemas en términos de cambios de signo. Antes, presentamos algunas definiciones de conteo para cambios de signo de vectores y funciones.

Para un vector de números reales $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$, definimos por $S^-(\omega)$ el número de cambios de signo en la secuencia $\omega_1, \ldots, \omega_r$, donde los ceros son ignorados. Aquí, $S^-(\omega) = 0$ cuando $r = 1$. Sea $f \in \mathcal{C}(M)$. Definimos por

$$S_M^-(f) = \sup_r \{S^-((f(z_1), \ldots, f(z_r))) : z_1 < \ldots < z_r \text{ en } M\},$$

el número de fuertes cambios de signo de f en M. Si f es no-negativa ó no-positiva en M, entonces escribimos $S_M^-(f) = 0$.

Teorema 1 *[5, Teorema 2.39, pág. 37] Sean $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset \mathcal{C}(M)$ un conjunto de funciones linealmente independientes y $U = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un DT-sistema en M, entonces*

$$S_M^-(u) \leq n - 1, \quad \textit{para todo} \quad u \in U \setminus \{0\}. \tag{2}$$

Recíprocamante, si (2) es válida, entonces $\{u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n\}$ ó $\{u_1, \ldots, u_{n-1}, -u_n\}$ es un DT-sistema en M.

Buenas referencias para propiedades y ejemplos de H-sistemas, FH-sistemas y DT-sistemas pueden encontrarse en [2, 5]. Es bien sabido que los sistemas de Haar (o sistemas de Chebyshev) desempeñan un papel importante en muchas partes del análisis, así como en la probabilidad y la estadística. Sin embargo, los sistemas débiles de Chebyshev son formas más débiles de los sistemas de Haar, capaces de abarcar splines. Dado que las clases de funciones splines poseen muchas propiedades estructurales agradables, así como excelentes propiedades de aproximación, se puede encontrar un gran número de aplicaciones en la solución numérica de una variedad de problemas en matemáticas aplicadas [1, 5, 6].

Por [3, Teorema 2.3] sabemos que si $W \subset \mathcal{C}(M^*)$ es un DT-espacio en M^* de $\dim(W) = n$, entonces $U = W_M \subset \mathcal{C}(M)$ es un DT-espacio en M de $\dim(U) = \ell$, donde $\ell \leq n$. Ahora supongamos que $U \subset \mathcal{C}(M)$ es un DT-espacio en M de $\dim(U) = n$. Nos preguntamos si podemos encontrar un DT-espacio en M^* de dimensión igual a n, digamos W, tal que $U = W_M$.

En este trabajo probaremos que esta pregunta tiene una respuesta afirmativa. También, demostraremos que sistemas débiles de Chebyshev pueden ser aproximados uniformemente por sistemas fuertes de Chebyshev.

2. Una extensión de DT-sistemas. Un procedimiento de suavizado

Comenzamos esta sección dando las siguientes observaciones y notaciones. Si $M \subsetneq M^*$, entonces $M^* \setminus M$ es un conjunto abierto no vacío de M^*. Así, existe una colección $\{(a_i, b_i) : i \in L\}$, a lo sumo numerable de intervalos de $\mathbb{R}$, abiertos y disjuntos dos a dos tales que

$$M^* \setminus M = \bigcup_{i \in L} (a_i, b_i).$$

Usando la notación anterior, para $g \in \mathcal{C}(M)$, definimos por $T_M(g) : M^* \to \mathbb{R}$ la extensión continua de g a M^* dada por:

$$T_M(g)(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \in M, \\ \frac{g(b_i) - g(a_i)}{b_i - a_i}(x - a_i) + g(a_i) & \text{si} \quad x \in (a_i, b_i), \quad i \in L. \end{cases}$$

Cuando $M = M^*$, usamos $T_M(g) = g$.

Lema 1 *El operador $T_M : \mathcal{C}(M) \to \mathcal{C}(M^*)$ es una aplicación lineal tal que $\|T_M(g)\|_{M^*} = \|g\|_M$ y $S_{M^*}^-(T_M(g)) = S_M^-(g)$, para todo $g \in \mathcal{C}(M)$.*

Prueba. Claramente, T_M es un operador lineal. Sea $g \in \mathcal{C}(M)$. Si $x \in (a_i, b_i)$, $i \in L$, entonces $|T_M(g)(x)| \leq \text{máx}\{|g(a_i)|, |g(b_i)|\} \leq \|g\|_M$ ya que $a_i, b_i \in M$. Luego, $\|T_M(g)\|_{M^*} = \|g\|_M$.
Por otro lado, como

$$\begin{aligned}
&\{S^-((g(z_1), \ldots, g(z_r))) : z_1 < \ldots < z_r \text{ en } M\} \\
&= \{S^-((T_M(g)(z_1), \ldots, T_M(g)(z_r))) : z_1 < \ldots < z_r \text{ en } M\} \\
&\subset \{S^-((T_M(g)(z_1), \ldots, T_M(g)(z_r))) : z_1 < \ldots < z_r \text{ en } M^*\},
\end{aligned}$$

tenemos $S_M^-(g) \leq S_{M^*}^-(T_M(g))$. Asumimos ahora $\ell = S_M^-(g) < S_{M^*}^-(T_M(g))$. Por ende, existen $z_1 < \ldots < z_{\ell+2}$ en M^* tales que

$$S^-((T_M(g)(z_1), \ldots, T_M(g)(z_{\ell+1}), T_M(g)(z_{\ell+2}))) = \ell + 1, \tag{3}$$

esto es, $T_M(g)(z_i)T_M(g)(z_{i+1}) < 0$, $1 \leq i \leq \ell + 1$. Si $z_1 < \ldots < z_{\ell+2}$ en M, entonces

$$\ell + 1 = S^-((g(z_1), \ldots, g(z_{\ell+1}), g(z_{\ell+2}))) \leq S_M^-(g), \tag{4}$$

lo cual es una contradicción. Así, existe $1 \leq k \leq \ell + 2$ que verifica $z_k \notin M$. Sean

$$m_1 = \text{mín}\{k : 1 \leq k \leq \ell + 2, z_k \notin M\}$$

e $i \in L$ tal que $z_{m_1} \in (a_i, b_i)$.
Supongamos $m_1 = \ell + 2$, es decir, $z_i \in M$, $1 \leq i \leq \ell + 1$. Como $z_{\ell+1} < z_{\ell+2} = z_{m_1} < b_i$, si $z_{\ell+1} > a_i$ entonces $z_{\ell+1} \notin M$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $z_{\ell+1} \leq a_i$. Puesto que $T_M(g)(z_{m_1}) \neq 0$, deducimos $g(a_i) \neq g(b_i)$ ó $g(a_i) = g(b_i) \neq 0$.
Afirmamos que existe $z \in \{a_i, b_i\} \setminus \{z_{\ell+1}\}$ satisfaciendo que $T_M(g)(z_{m_1})g(z) > 0$ y $z_1 < \ldots < z_{\ell+1} < z$ en M. En efecto, pueden darse tres casos
(1): $T_M(g)(z_{m_1})g(a_i) > 0$. Como $z_{\ell+1} \leq a_i < z_{m_1}$ y $T_M(g)(z_{m_1})g(z_{\ell+1}) = T_M(g)(z_{m_1})T_M(g)(z_{\ell+1}) < 0$, tomamos $z = a_i$
(2): $T_M(g)(z_{m_1})g(a_i) < 0$. Dado que $T_M(g)(a_i) = g(a_i)$, $T_M(g)$ es una función lineal sobre $[a_i, b_i]$ y $z_{m_1} \in (a_i, b_i)$, conseguimos $T_M(g)(z_{m_1})g(b_i) > 0$. En consecuencia, tomamos $z = b_i$.
(3): $g(a_i) = 0$. Como $g(b_i) \neq 0$ y $T_M(g)$ es lineal sobre $[a_i, b_i]$, $T_M(g)(z_{m_1})g(b_i) > 0$ y tomamos $z = b_i$.
Se sigue que $\text{sgn}(T_M(g)(z_{\ell+1}))\text{sgn}(T_M(g)(z)) < 0$, y por lo tanto,

$$S^-((g(z_1), \ldots, g(z_{\ell+1}), g(z))) = S^-((T_M(g)(z_1), \ldots, T_M(g)(z_{\ell+1}), T_M(g)(z))) = \ell + 1,$$

lo cual es imposible.
Ahora asumimos $m_1 < \ell + 2$. Entonces $z_{m_1+1} < b_i$ o $z_{m_1+1} \geq b_i$. Consideremos cada caso separadamente.
Caso (I): $z_{m_1+1} < b_i$. Como $T_M(g)(z_{m_1})T_M(g)(z_{m_1+1}) < 0$, entonces $g(a_i) \neq g(b_i)$, $\text{sgn}(T_M(g)(z_{m_1})) = \text{sgn}(g(a_i))$ y $\text{sgn}(T_M(g)(z_{m_1+1})) = \text{sgn}(g(b_i))$. Luego, $z_{m_1-1} < a_i < z_{m_1}$ si $m_1 > 1$, y $z_{m_1+1} < b_i < z_{m_1+2}$ si $m_1 + 1 < \ell + 2$. Ahora, reemplazamos z_{m_1} por a_i y z_{m_1+1} por b_i.
Caso (II): $z_{m_1+1} \geq b_i$. Como antes, podemos tomar $z \in \{a_i, b_i\} \setminus \{z_{m_1+1}\}$ tal que $T_m(g)(z_{m_1})g(z) > 0$. Concretamente, $z = b_i$ si $T_M(g)(z_{m_1})g(a_i) \leq 0$ y $z = a_i$ en caso contrario. Reemplazamos z_{m_1} por z.
En cualquier caso, tenemos una nueva configuración de puntos $z_1 < \ldots < z_{\ell+2}$ en M^*, donde $m_1 < \text{mín}\{k : 1 \leq k \leq \ell + 2, z_k \notin M\}$ y (3) es verdadera.
Finalmente, repitiendo los pasos de arriba, una cantidad finita de veces, podemos encontrar $z_1 < \ldots < z_{\ell+2}$ en M satisfaciendo (4), lo cual es otra contradicción. □

Teorema 2 *Sea $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset \mathcal{C}(M)$ un conjunto de funciones linealmente independentes. Entonces, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un DT-sistema en M si y sólo si $\{T_M(u_1), \ldots, T_M(u_n)\}$ es un DT-sistema en M^*.*

Prueba. Si $M = M^*$, la afirmación es obvia puesto que $T_M(u_i) = u_i$. Supongamos ahora que $M \subsetneq M^*$ y $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un DT-sistema en M. Como $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un conjunto de funciones linealmente independientes, tenemos

$$V\begin{pmatrix} u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n \\ y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{para algunos } y_1 < \ldots < y_n \text{ en } M. \tag{5}$$

Por lo tanto,

$$V\begin{pmatrix} T_M(u_1),\ldots,T_M(u_{n-1}),T_M(u_n) \\ y_1,\ldots,y_{n-1},y_n \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{para algunos } y_1 < \ldots < y_n \text{ en } M^*$$

y entonces $\{T_M(u_1),\ldots,T_M(u_n)\}$ es un conjunto de funciones linealmente independientes. Por el Lema 1 y el Teorema 1, obtenemos

$$S^-_{M^*}\left(\sum_{j=1}^n c_j T_M(u_j)\right) = S^-_{M^*}\left(T_M\left(\sum_{j=1}^n c_j u_j\right)\right) = S^-_M\left(\sum_{j=1}^n c_j u_j\right) \leq n-1,$$

para todo $c_1,\ldots,c_n$, números reales no simultáneamente nulos. Del Teorema 1 podemos concluir que $\{T_M(u_1),\ldots,T_M(u_n)\}$ o $\{T_M(u_1),\ldots,-T_M(u_n)\}$ es un DT-sistema en M^*. Supongamos que $\{T_M(u_1),\ldots,-T_M(u_n)\}$ es un DT-sistema en M^* y sean $z_1 < \ldots < z_n$ en M. Como $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es un DT-sistema en M, obtenemos

$$0 \leq V\begin{pmatrix} T_M(u_1),\ldots,T_M(u_{n-1}),-T_M(u_n) \\ z_1,\ldots,z_{n-1},z_n \end{pmatrix} = -V\begin{pmatrix} u_1,\ldots,u_{n-1},u_n \\ z_1,\ldots,z_{n-1},z_n \end{pmatrix} \leq 0.$$

Puesto que $z_1 < \ldots < z_n$ en M son arbitrarios, deducimos $V\begin{pmatrix} u_1,\ldots,u_{n-1},u_n \\ z_1,\ldots,z_{n-1},z_n \end{pmatrix} = 0$, para todo $z_1 < \ldots < z_n$ en M, lo cual contradice (5).
Finalmente, como la implicación recíproca es trivial, la prueba está completa. $\square$

Es fácil ver que el Teorema 2 no vale en general para H-sistemas.

Como una consecuencia del resultado previo, podemos ver que [4, Proposición 6, p.199], llamado un procedimiento de suavizado, es también válido para funciones definidas sobre cualquier conjunto compacto de la recta real.

Teorema 3 *Sea $\{u_1,\ldots,u_n\} \subset \mathcal{C}(M)$ un DT-sistema en M. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe un FH-sistema $\{u_1^\epsilon,\ldots,u_n^\epsilon\}$ en M tal que cada u_j^ϵ converge uniformemente a u_j en M, cuando $\epsilon \to 0$, $1 \leq j \leq n$.*

Prueba. Si $M = M^*$, por [4, Proposición 6, p.199] el resultado es obvio. Asumamos $M \subsetneq M^*$. El Teorema 2 implica que $\{T_M(u_1),\ldots,T_M(u_n)\}$ es un DT-sistema en M^*. Por [4, Proposición 6, p.199], tenemos que para todo $\epsilon > 0$, existe un T-sistema $\{v_1^\epsilon,\ldots,v_n^\epsilon\}$ en M^* tal que cada v_j^ϵ converge uniformemente a $T_M(u_j)$ en M^*, cuando $\epsilon \to 0$, $1 \leq j \leq n$. Escribimos $u_j^\epsilon = v_j^\epsilon\big|_M \in \mathcal{C}(M)$, y entonces u_j^ϵ converge uniformemente a u_j en M, cuando $\epsilon \to 0$, $1 \leq j \leq n$. Finalmente, como de (1), $\{v_1^\epsilon,\ldots,v_n^\epsilon\}$ es un FH-sistema en M^*, deducimos que $\{u_1^\epsilon,\ldots,u_n^\epsilon\}$ es un FH-sistema en M, y por ende la prueba está completa. $\square$

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por Universidad Nacional de Río Cuarto (PPI 18/C559), Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ingenieria (Resol. Nro. 165/18), Universidad Nacional de San Luis (PROICO 030720) y CONICET (PIP 11220200100694CO).

REFERENCIAS

[1] J. FAN, AND Q. YAO, *Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[2] G. HÄMMERLIN, AND K. HOFFMANN, *Numerical Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[3] A. KROÓ, AND A. PINKUS, *Strong Uniqueness*, Surveys in Approximation Theory, 5 (2010), 1-91.

[4] A. PINKUS, *On L^1- Approximation*, Cambridge Tracts In Mathematics, Vol. 93, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[5] L. SCHUMAKER, *Spline functions: Basic theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[6] S.B. STECHKIN, AND YU.N. SOBBOTIN, *Splines in numerical mathematics* Nauka, Moscow, 1976.