EL ESPECTRO DE FUČÍK

ARIEL M. SALORT

DURACIÓN: 4 CLASES DE APROX. 2 HS/2.30 HS

Objetivos del curso

Estudiaremos problemas no lineales del tipo

$$-\Delta u(x) = g(u(x)) \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ acotado,} \tag{1}$$

con $u(x) = 0$ sobre $\partial\Omega$. Particularmente nos interesaremos en el caso de no linealidades de salto, es decir cuando

$$g(\xi) = \alpha\xi^+ - \beta\xi^-$$

para ciertas constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, siendo $\xi^\pm = \max\{\pm\xi, 0\}$.

La existencia de pares (α, β) resolviendo (1) de manera no trivial es lo que se denomina actualmente *espectro de Fučík* en honor al matemático checo Svatopluk Fučík, quien, a fines de las 70's trató este tipo de problemas.

Hay interesantes interpretaciones asociadas a (1), incluyendo el modelado eficiente de puentes colgantes.

Cuando $\alpha = \beta$ recuperamos el espectro del Laplaciano, pero la estructura general es sumamente curiosa, y se caracteriza como una familia de curvas continuas en $\mathbb{R}^2$.

Contenidos

1. **Introducción**: Estudiaremos el espectro y propiedades del problema

$$-\Delta u = \alpha u^+ - \beta u^- \quad \text{en } \Omega \tag{2}$$

con condición de borde Dirichlet en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, donde α y β son números reales.

Veremos:
   - Para qué sirve esto? Motivación de este tipos de ecuaciones: problemas de resortes acoplados y la construcción de puentes colgantes.
   - La formulación variacional del problema, una pequeña introducción al cálculo de variaciones y como aplicarlo para probar existencia de soluciones.
   - Posibles extensiones del problema.

2. **Autovalores y autofunciones del laplaciano**: Estudiaremos el problema de autovalores

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{en } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \tag{3}$$

debido a la conexión fundamental que tiene en la caracterización del espectro de (2).

Veremos
   - Existencia de una sucesión infinita de autovalores del problema (3).
   - Fórmulas minimax para los autovalores.
   - Propiedades que cumple el primer autovalor: simplicidad, signo de sus autofunciones.
   - Principales diferencias con los autovalores del $p-$Laplaciano.

3. **Espectro de Fučík** en dimensión 1: Veremos:
   - En este caso el espectro está totalmente determinado.
   - El espectro es continuo y se pueden obtener fórmulas explícitas.
   - Qué propiedades se espera que valgan en dimensión $n > 1$?
   - Posible generalización al $p-$Laplaciano.

4. **Espectro de Fučík** en $\mathbb{R}^n$, $n > 1$: Veremos:
   - Existencia de las líneas triviales del espectro.
   - Existencia de una primera curva no trivial en el espectro.
   - Formulación variacional de la primera curva.
   - Propiedades cualitativas que cumple la primera curva.
   - Qué hay mas allá de esta curva?
   - Posibles generalizaciones al $p-$Laplaciano y a operadores no locales.